数理解析研究所講究録
347 巻 1979 年 84-95

振動しつつ成長する葉

東大 理 土屋信雄

1 MをコンパクトなC^r級多様体，$\mathcal{F}$をその上のC^r級余次元1葉層とする。Mが境界を持つとき，$\mathcal{F}$は境界に接しているとする。Fを$\mathcal{F}$の葉とするときその成長度を定義する。Mを有限個の特殊葉層座標近傍$\{U_i\}$ $i=1,2,\cdots,k$で被覆する。定義から各iに対して，C^r級同相$\varphi_i : U_i \to \mathring{D}^{n-1}\times\mathring{D}^1$（$n$は$M$の次元）で$\mathcal{F}|U_i$を$\mathring{D}^{n-1}\times\mathring{D}^1$の積葉層に写すものが存在する。$\varphi_i^{-1}(\mathring{D}^{n-1}\times\{x\})$を$x$を通る切片という。切片の列（$p_1$, $p_2, \cdots, p_l$）が切片の鎖であるとは$p_i \cap p_{i+1} \neq \phi$（$i=1,2,\cdots,l-1$）である事をいう。葉$F$に含まれる切片$p$を選ぶ。$F$の$p$における成長関数とは$n \in \mathbb{Z}^+$に対して，$p$から出発する長さが$n$以下の切片の鎖により到達できる切片の数を対応させる関数である。

$C(\mathbb{Z}^+)$で，$\mathbb{Z}^+$から$\mathbb{Z}^+$への単調増加関数のなす集合を表わす。$g, h \in C(\mathbb{Z}^+)$に対して$g > h$であるとは，正数α, β, γが存在し

て，$g(n) > \alpha h(\beta n-\gamma)$が成り立つ事とする。$g \succ h$かつ$g \prec h$であるとき$g$と$h$は同じ成長型を持つと言う。

定義　葉Fの成長関数をfとする。Fが多項式的成長度を持つとは，正数dが存在して$f \prec (n^d)$となる事をいう。Fがd-次の正確に多項式的な成長度を持つとはfと(n^d)が同じ成長型を持つ事をいう。

問題（G. Hector [4]）　Fが多項式的成長度を持つとすると，Fは整数次の正確に多項式的な成長度を持つか？

このノートでは，成長度が低い時この問題は肯定的である事（定理A）及びC^0-級葉層では否定的である事（定理B）を示す。なお[8]によると$\mathcal{F}$がC^ω-級である時，又は$\mathcal{F}$がC^2-級$(r \geq 2)$で殆んどホロノミーを持たない時この問題は正しい。

定理A　$\mathcal{F}$をC^2-級$(r \geq 2)$とする。Fを$\mathcal{F}$の葉，fをその成長関数とする。$f \prec (n^2)$であるとき，Fは0，1又は2次の正確に多項式的な成長度を持つ。

定理Bを述べる為に葉Fの下成長度（$\ell.gr(F)$）と上成長度

($u.gr(F)$) を定義する。Fは多項式的成長度を持つとし，fをその成長関数とする。$l.gr(F)$と$u.gr(F)$を次で定義する。

$$l.gr(F) = \sup\{d \in \mathbb{R}^+ \mid f \succ (n^d)\}$$
$$u.gr(F) = \inf\{d \in \mathbb{R}^+ \mid f \prec (n^d)\}.$$

$l.gr(F) < u.gr(F)$である時，Fは振動しながら成長すると考えられる。

<u>定理B</u>　閉3次元多様体のC^2級余次元1葉層$\mathcal{F}$で次の性質を満たすものがある。2以上の整数dに対し$\mathcal{F}$の葉F_dとF'_dで次を満たすものがある。

$$d < l.gr(F_d) = u.gr(F_d) < d+1$$
$$d < l.gr(F'_d) < u.gr(F'_d) < d+1 .$$

2　定理Aの証明の準備をする。葉Fの<u>真葉による深度</u>(proper depth of F, $pd(F)$)を次で定義する。

$pd(F) = \sup\{k \mid$ 葉の列$F_0, F_1, \cdots, F_k$で次を満たすものが存在する；F_iはF_{i+1}の極限集合に含まれ，$F_i \neq F_{i+1}$である。また$i<k$の時F_iは真葉であり$F_k = F$である。$\}$

[7]の定理2の証明から次の命題が従う。

命題(2.1)　$\mathcal{F}$がC^r級$(r \geqq 1)$であれば，葉Fに対して，
$(F$の成長関数$) > (n^{pd(F)})$である。

Mの部分集合Uが$(\mathcal{F}$に関して$)$飽和であるとは，Uは葉の和集合である事をいう。飽和開集合Uが良好であるとは，$\bar{U}-U$が有限枚の真葉から成り，Uに含まれる葉のホロノミー群は自明である事をいう。良好な集合Uが極小であるとはUに含まれる相対開飽和部分集合は空集合またはU自身に限る事をいう。Uを極小良好集合とすると，Uに含まれる単純閉曲線Cで$\mathcal{F}$に横断的なものが存在する。今西[5]の結果から$\mathcal{F}$のホロノミー擬群のCへの制限GはCのC^r級微分同相の群$\mathrm{Diff}^r(C)$の部分群であり，GはNovikov変換と呼ばれる準同型写像　$g: \pi_1(U) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r(C)$の像である事がわかる。更に$G$は可換群である。

定理Aの証明　$u.gr(F) \leqq 1$であるとき，[8]の定理(7.2)からFは0又は1次の正確に多項式的な成長度を持つ。そこで$u.gr(F) > 1$であると仮定する。命題(2.1)より$pd(F)$は0，1又は2である。まず$pd(F)=2$とすると，再び命題(2.1)よりFは2次

の正確に多項式的な成長度を有する。次に $pd(F)=1$ とする。この時 F は真葉ではない。実際 F が真葉であるとすると，Cantwell-Conlon の定理 ([1], 命題2) から，F の極限集合に含まれる葉は全て真葉であり，命題 (2.1) と組み合わせると，全てコンパクトである事がわかる。そうすると [8] の定理3 から F は1次の成長度を持つことになる。F は非真葉であるので，Cantwell-Conlon の定理 ([1], 命題3) から，$U=\overline{F}-\cup\{\overline{F}$ に含まれる真葉$\}$ は極小良好集合である。$\overline{F}$ に含まれる真葉は全てコンパクトなので [8] の命題 (5.7) から，そのホロノミー群は可換である。従って [8] の定理2 から F は2次の正確に多項式的な成長度を持つ。

最後に $pd(F)=0$ とすると，前出の Cantwell-Conlon の定理から M 自身が極小良好集合である事がわかり，[8] の定理2 から，$\mathcal{F}$ の全ての葉は2次の正確に多項式的な成長度を持つ。 □

3. S を種数2の向き付け可能な閉曲面とする。2以上の整数 d に対し，$S\times[-1,1]$ の葉層で，$d<l.gr(F)\leqq u.gr(F)<d+1$ であるような葉 F を含むものを構成する。

f と g を $[-1,1]$ の向きを保つ同相写像とする。S の基本群の $Homeo([-1,1])$ への表現 ψ で，その像が f と g の生成する部分群

Gと一致するものが存在する。$\tilde{S}$をSの普遍被覆とし，$\tilde{S}\times[-1,1]$の積葉層を，$\pi_1(S)$の対角作用で割って得られる$S\times[-1,1]$の葉層を$\mathcal{F}_{(f,g)}$と書く（[2]，(1.8)参照）。$\mathcal{F}_{(f,g)}$は各ファイバー$\{x\}\times[-1,1]$に横断的で，そのモノドロミー写像（全ホロノミー写像）はψと同一視できる。

fとして$[-1,1]$の微分同相で，各$x\in(-1,1)$に対して$f(x)>x$であるものをとる。整数nに対して$a_n=f^n(0)$とする。hを$[-1,1]$の微分同相で，その台は$[a_0,a_1]$であり，$x\in(a_0,a_1)$に対して$h(x)>x$で，hは微分同相の1径数群$\{h^t\}_{t\in\mathbb{R}}$に埋め込まれているものをとる。与えられている整数$d\geq 2$に対して，$(d-2)$個の実数$\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-2}$で，$1,\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-2}$が$\mathbb{Q}$上独立なものをとる。最後に単調増加整数列$\{N_i\}$ $i=1,2,\cdots$，$N_1\geq 2$をとる。

$$h_{(0)}=h\circ f^{-d+2}\circ h^{\alpha_{d-2}}\circ f\circ h^{\alpha_{d-1}}\circ\cdots\circ f\circ h^{\alpha_1}\circ f$$

とし，$k\geq 1$に対して帰納的に

$$h_{(k)}=f^{N_k}\circ h^{2^{-k}}\circ f^{-N_k}\circ h_{(k-1)}$$

と定義する。$g=\lim_{k\to\infty}h_{(k)}$とする。$g$は$[-1,1]$の同相写像で$(-1,1)$では可微分である。

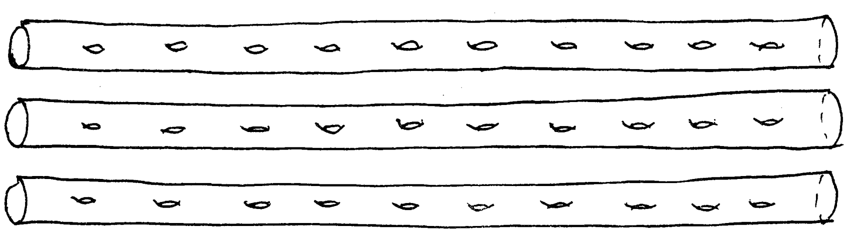
$S\times[-1,1]$の葉層$\mathcal{F}_{(f,g)}$を考える。簡単のため$\mathcal{F}_{(f,g)}$を単に$\mathcal{F}$と書く。Sの基点上のファイバーと区間$[-1,1]$とを同一視する。$\mathcal{F}$について，次の補題が容易に証明できる。

補題(3.1)　(1) $\mathcal{F}$ の真葉は2枚のコンパクトな葉 $S\times\{\pm 1\}$ と，a_0 を通る葉とに限る。

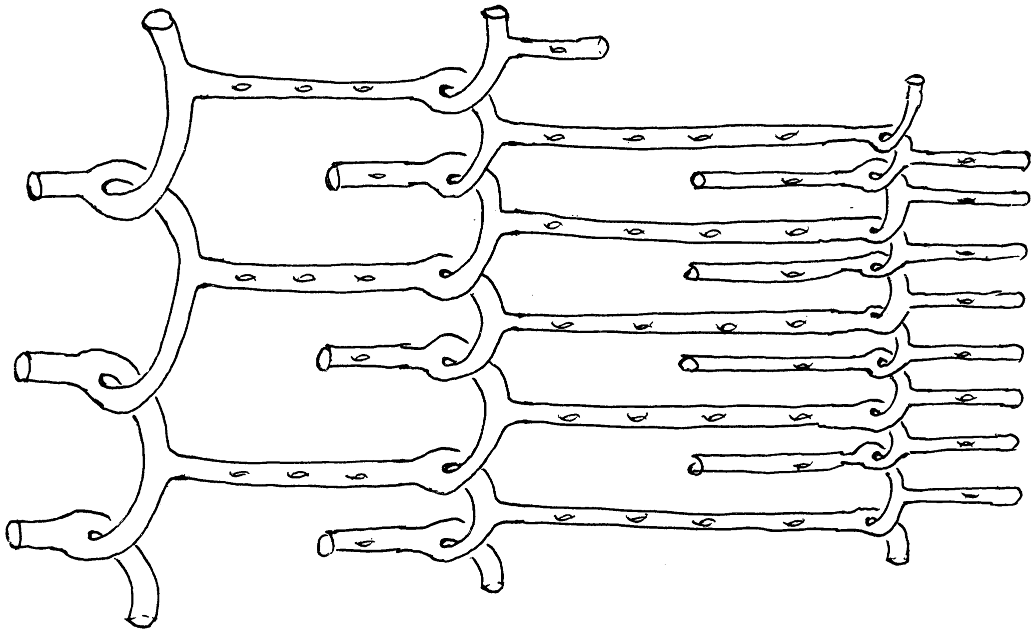
(2) 区間 (a_0, a_1) の飽和化 U は極小良好集合である。

(3) U の Novikov 変換の像は $\mathbb{Z}^{d-2}\oplus\Sigma$ と同型である。ここに，Σ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の部分群で $\{2^{-i}\}_{i=1,2,\cdots}$ により生成されるもの。

$\mathcal{F}(f, id)$ の葉



$\mathcal{F}(f, g)$ の葉



(a_0, a_1)に含まれる点tをとる。Fをtを通る葉，$T=F\cap[-1,1]$$=G\cdot t$とする。$G$の元の，生成集合$\{f,g\}$に関する長さから，$T$の距離$\delta$が定義される。$T$の成長関数$\gamma: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$を次で定義する。

$$\gamma(m) = \#\{t' \in T \mid \delta(t,t') \leq m\}.$$

補題(3.2)　$\gamma(m)$とFの成長関数とは同じ成長型を持つ。

証明は例えば[8]の(2.3)にある。

Hector [3]に従って，Gの元cがtから$t' \in T$への近道であるとは$t' = c(t)$であり$\mathrm{length}(c) = \delta(t,t')$である事とする。与えられた$t' \in T$に対して標準形の近道がとれる事を見る。まず$t'$に対して整数$r$が一意的に存在して$f^r(t') \in (a_0, a_1)$となる。$f^r(t') \in G\cdot t$であるから整数$q$，$0 \leq q \leq d-2$と整数列$1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_q \leq d-2$，$(r_1, \cdots, r_q) \in \mathbb{Z}^q$と有理数$s$が一意的に存在して

$$f^r(t') = h^{r_1\cdot\alpha_{\beta_1} + r_2\cdot\alpha_{\beta_2} + \cdots + r_q\alpha_{\beta_q} + s}(t)$$

となる。sの整数部分をr'とすると，整数pと整数列$i_1 < i_2 < \cdots < i_p$が一意的に存在して

$$s = r' + \mathrm{sign}(r')\{2^{-i_1} + 2^{-i_2} + \cdots + 2^{-i_p}\}$$

と書ける。$(r; q, \beta_1, \cdots, \beta_q, r_1, \cdots, r_q; r', p, i_1, \cdots, i_p)$は，点$t'$の座標と思える。

補題(3,3)　t'の"座標"を $(x; q, \beta_1, \cdots, \beta_q, x_1, \cdots, x_q; x', p, i_1, \cdots, i_p)$ とすると，次で定義されるGの元cはtからt'への近道である。

(1)　$p=0$ のとき，

$$c = f^{x} \circ g^{x'} \circ f^{\beta_1} \circ g^{x_1} \circ f^{-\beta_1+\beta_2} \circ g^{x_2} \circ \cdots \circ f^{-\beta_{q-1}+\beta_q} \circ g^{x_q} \circ f^{-\beta_q}$$

(2)　$p>0$ のとき

$$c = f^{x} \circ g^{\varepsilon} \circ f^{N_{i_p}-N_{i_{p-1}}} \circ g^{\varepsilon} \circ f^{N_{i_{p-1}}-N_{i_{p-2}}} \circ g^{\varepsilon} \circ \cdots \circ g^{\varepsilon} \circ f^{N_{i_1}} \circ g^{x'} \circ$$
$$\circ f^{\beta_1} \circ g^{x_1} \circ f^{-\beta_1+\beta_2} \circ g^{x_2} \circ \cdots \circ f^{-\beta_{q-1}+\beta_q} \circ g^{x_q} \circ f^{-\beta_q},$$

ただし $\varepsilon = \mathrm{sign}(x')$ とする。

証明は省略する。補題(3,3)の形の近道を標準形の近道といい，pをその階数という。$\gamma_p(m)$を次で定義する。

$$\gamma_p(m) = \#\{c(t) \mid c\text{は階数}p\text{の標準形の近道で長さが}m\text{以下}\}。$$

$N_p \leqq m < N_{p+1}$ であれば $\gamma(m) = \gamma_0(m) + \gamma_1(m) + \cdots + \gamma_p(m)$ である。

$\alpha(m)$で階数dの自由アーベル群の(自然な基に関する)成長関数を表わす。$\alpha(m)$は(m^d)と同じ成長型を持つ。

補題(3,4)　$N_p \leqq m < N_{p+1}$ である時，次の評価式が成り立つ。

$$2^{p-1} \cdot \alpha(m - N_{p-1} - 2p) \leqq \gamma(m) \leqq 2^p \cdot \alpha(m) \quad \text{----} \; (*)$$

証明　(3.3)で与えた近道の標準形から，各r，$0\leqq r\leqq p$に対して$\gamma_r(m)$についての次の評価が得られる。

$$\sum_{i=r}^{p}\binom{i-1}{r-1}d(m-d-N_i-r)\leqq\gamma_r(m)\leqq\sum_{i=r}^{p}\binom{i-1}{r-1}d(m-N_i-r).$$

(※)はこの式から容易に従う。 □

評価式(※)を使う初等的な計算により，次の命題が証明できる。

命題(3.5)　(1)　Aを3以上の整数とし，$N_i=A^i$とする。そうすると　$l.gr(F)=u.gr(F)=d+\log 2/\log A$　となる。

(2)　A，Bを正の整数で，$\log\{(A+1)/A\}<2/d$及び$\log 2/\log B<\log\{(A+1)/A\}$を満たすものとする。整数列$\{N_i\}$は次の条件を満たすとする；

(i)　$(A+1)^i\leqq N_i\leqq B^i$

(ii)　$N_i-N_{i-1}\geqq A^{i-1}$

(iii)　無限列$\{p_i\}$で，$N_{p_i}=(A+1)^{p_i}$及び$N_{p_i+1}=B^{p_i+1}$をみたすものがある。

このとき　$d<l.gr(F)<u.gr(F)<d+1$となる。

定理Bの証明　命題(3.5)より，各$d\geqq 2$に対して$S^1\times[-1,1]$の葉層$\mathcal{F}_d$と$\mathcal{F}'_d$で，それぞれ次の条件を満たす葉F_dとF'_dを

含むものが存在する；

$$d < l.gr(\mathcal{F}_d) = u.gr(\mathcal{F}_d) < d+1$$

$$d < l.gr(\mathcal{F}'_d) < u.gr(\mathcal{F}'_d) < d+1 .$$

定理Bの例は，この $\mathcal{F}_d, \mathcal{F}'_d$，$d=2,3,\cdots$ を貼り合わせる事によって構成できる。 $\square$

参考文献

[1] J. Cantwell – L. Conlon, Growth of leaves, Comment. Math. Helv. 53 (1978), 93–111.

[2] A. Haefliger, Variétés feuilletées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 16 (1964), 367–397.

[3] G. Hector, Leaves whose growth is neither exponential nor polynomial, Topology 16 (1977), 451–459.

[4] G. Hector, Croissance des feuilletages presque sans holonomie, Springer lecture note 652, 1978.

[5] H. Imanishi, On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy, J. Math. Kyoto. Univ. 14 (1974), 607–634.

[6] J. F. Plante, Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math. 102 (1975), 327–361.

[7] N. Tsuchiya, Lower semi-continuity of growth of leaves.
, to appear.

[8] N. Tsuchiya, Growth and depth of leaves, to appear